圣维南原理在力与称重传感器设计中的应用

中国运载火箭技术研究院第 702 研究所　　刘九卿

【摘要】在力与称重传感器弹性元件结构设计和力值传递时，经常遇到一个集中力如何变换为一个等效面力，并保证弹性元件应变区应力分布均匀的问题。结合这一问题本文介绍了力值等效传递的圣维南原理，分析了二维板式弹性元件和三维圆柱式弹性元件应力传播均匀化的截面特性，给出了应力值达到均匀化截面离开端部载荷点距离 h_k 的计算公式，并简要介绍了载荷均匀化的截面位置特性值 h_k 在几个典型结构中的应用。

【关键词】力与称重传感器；圣维南原理；集中力；等效面力；应力传播；应力均匀化

一、概述

在力与称重传感器弹性元件结构设计时，在选择电子衡器承载器对称重传感器施加载荷方式时，在标准力值传递试验时，人们经常会遇到这样的问题，即一个集中力或一个小范围的面力如何均匀的变换为一个等效面力或大范围的等效面力。例如，在用叠加式力标准机上的圆柱式标准力传感器对轧钢机上使用的长方形垫板式力传感器进行检定时，就面临如何将一个圆形分布的小范围面力变换成一个矩形分布的大范围面力的问题。此类问题也经常出现在力与称重传感器的弹性元件、引入载荷的压头和承受载荷的压垫设计过程中。由于力与称重传感器电桥电路的输出取决于弹性元件应变区的应变程度（一般为$\varepsilon=1000\times10^{-6}$ 以上），所以要求弹性元件应变区受力单一，在粘贴电阻应变计的应变区应力分布均匀，归纳起来就是力与称重传感器的弹性元件应在应力均匀分布的条件下工作。因此，在力与称重传感器弹性元件结构及其附件设计中，找到保证力值等效传递的必要条件，解析出弹性元件应力达到均匀化的截面位置特性值至关重要。

二、力值等效传递的圣维南原理

关于力值等效传递的问题，早在 19 世纪法国力学家圣维南就在其论扭转的论文中提出：“如果作用于弹性体表面某一微小部分上的力，被作用于表面同一部分上的另一静力等效的力系所代替，那么，载荷的这种重新分布，将使应力在局部发生显著改变，但对距离较远处（与载荷被改变表面的线性尺寸相比）的应

力只有极小的影响”。或者说分布于弹性体上一小块面积（或体积）内的载荷所引起的物体内的应力，在离载荷作用区稍远的地方，基本上只同载荷的合力和合力矩有关，载荷的具体分布只影响载荷作用区附近的应力分布，这就是众所周知的“圣维南原理”。这一力值等效传递原理，在力与称重传感器弹性元件设计中可以理解为：对于作用在力与称重传感器弹性元件上的集中载荷，可以用静力等效并且作用于同一表面的分布载荷替换，这种替换造成的区别仅在受载表面附近是显著的，而在远离处几乎没有影响，可以认为是应力均匀分布区。现以圆柱式力与称重传感器弹性元件的结构设计为例，说明圣维南原理在圆柱形弹性元件上是如何保证外力值等效传递的。例如有一承受压向载荷的圆柱式弹性元件，受平衡力系 P 的作用，如果将此力系 P 变化为等效力系 q 的作用，即

$$q=\frac{P}{A}$$

式中 A 为圆柱形弹性元件应变区的截面积。此时，圆柱式弹性元件就承受均布载荷 q 的作用，其外载荷作用简图如图 1 所示。

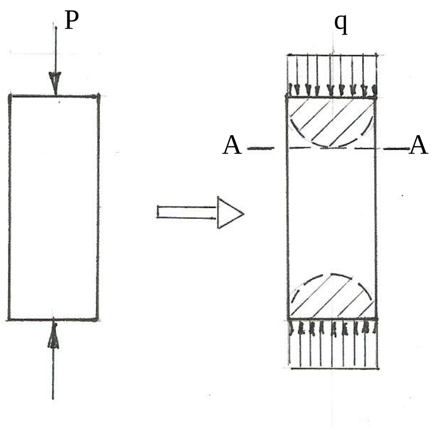

图 1 圆柱式弹性元件受载简图

根据圣维南原理，只有距离圆柱式弹性元件载荷引入端充分远处，例如图中的 A—A 截面，才可以用等效力系 $q=\frac{P}{A}$ 来代替 P。由图可以看出，施加外载荷的分布特性仅仅影响到弹性元件部分区域内的应力，即图中虚线以内的应力分布不能用等效力系 q 来代替。而几乎不影响远离施加载荷截面充分远各点的应力，即虚线顶点断面以外处可以用与平衡力系 P 相当的等效分布力系 q 来代替。理论分析的结果是：在平衡力系 P 或较小面力 q 的作用下，弹性元件应力值达到均匀化的 M—N 截面，其载荷分布特性值 b 与载荷等效均布特性值 h_k 之间存在

定量关系，如图 2 所示。

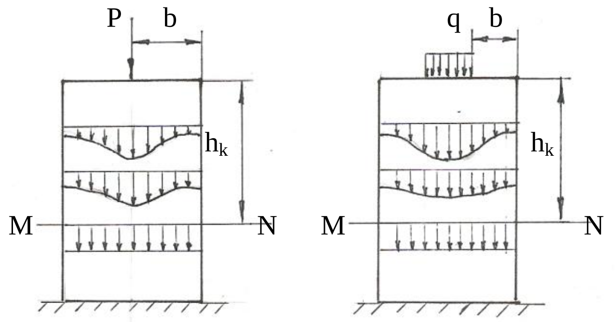

图 2 载荷分布特性 b 与载荷均布特性 h_k 示意图

那么这个充分远的距离 h_k 应当如何量化呢？这个距离无论是对力与称重传感器的弹性元件设计，还是对于标准力值的传递都是重要的尺寸参数。圣维南原理不可能对每一个具体受力结构和各种类型的弹性元件，其力的传递趋于均匀化给出定量的说明。应用圣维南原理者应根据受力结构或弹性元件的具体情况和边界条件，解决力的传递达到均匀化的定量分析，通过理论计算和试验验证给出这一距离的定量值。

三、圣维南原理在二维板式弹性元件中的应用

板式弹性元件是受测力与称重装备空间限制而必须采用的一种特殊结构，在各种吨位起重机力矩限制器上的应用较为广泛。由弹性力学知，板式弹性元件属于集中载荷在二维板中传播趋于均匀化的问题，其板式弹性元件力学模型如图 3 所示。

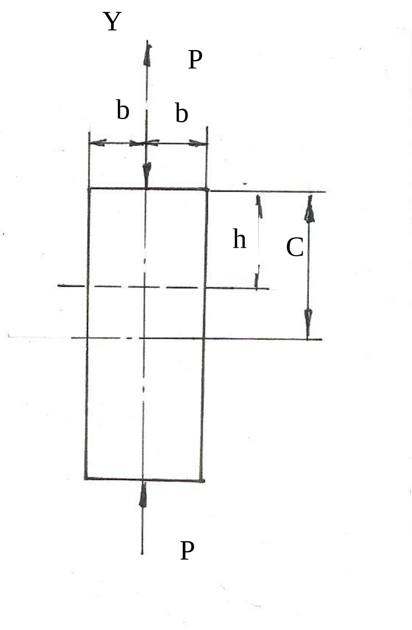

图 3 板式弹性元件力学模型

为求得应力分量σ $_y$，可采用三角级数的应力函数$\phi(x)$求解，即

$$\phi(x)=A\sin\frac{n\pi x}{b}f(y) \qquad (1)$$

应力函数$\phi(x)$保证满足下述相容条件：

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0 \qquad (2)$$

求解式（2）即可得到应力分量σ $_y$的通式：

$$\sigma_y=\frac{P}{2b}\cdot\frac{P}{b}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n\pi}{b}(c-y)+1\right]e^{\frac{n\pi}{b}(y-c)}\cdot\cos\frac{n\pi x}{b} \qquad (3)$$

当计算载荷值均匀化断面 M—N 的位置 h_k=c－y＞$\frac{b}{2}$时，表达式（3）该级数收敛很快，只取级数的前三项就可以得到足够精度的解。则应力分量σ $_y$可以写为：

$$\sigma_y=-\overline{\sigma}\left[1+2\left(\frac{\frac{\pi h_k}{b}+1}{e^{\frac{\pi h_k}{b}}}\cos\frac{\pi x}{b}+\frac{\frac{2\pi h_k}{b}+1}{e^{\frac{2\pi h_k}{b}}}\cos\frac{2\pi x}{b}+\frac{\frac{3\pi h_k}{b}+1}{e^{\frac{3\pi h_k}{b}}}\cos\frac{3\pi x}{b}\right)\right] \qquad (4)$$

式中：h_k=c－y，$\overline{\sigma}=\frac{P}{2b}$。

利用式（4）对 h_k=0.6b；h_k=b；h_k=2b 断面的应力分量σ $_y$进行计算。

当 x=0 时经计算得：

$$\sigma_{y1(h_k=0.6b)}=2.145\overline{\sigma} \qquad \sigma_{y1(h_k=b)}=1.387\overline{\sigma} \qquad \sigma_{y1(h_k=2b)}=1.027\overline{\sigma}$$

当 x=b 时经计算得：

$$\sigma_{y2(h_k=0.6b)}=0.297\overline{\sigma} \qquad \sigma_{y2(h_k=b)}=0.668\overline{\sigma} \qquad \sigma_{y2(h_k=2b)}=0.973\overline{\sigma}$$

从上述计算结果不难看出：当计算断面 M—N 的位置距离载荷 P 作用点的距离 h_k 增加时，横截面上的应力分布逐渐趋于均匀，即板式弹性元件中心的应力分量σ $_{y1}$与边缘的应力分量σ $_{y2}$接近。由此可以得出：在集中载荷 P 作用下的板式弹性元件，当载荷值达到均匀化的 M—N 截面离开端部载荷点的距离 h_k 等于板的宽度，即 h_k=2b 时，基本上可以认为应力达到了均匀分布。M—N 截面以外部分就是板式弹性元件受力单一，应力分布均匀的粘贴电阻应变计的应变区。

四、圣维南原理在三维圆柱式弹性元件中的应用

圆柱式力与称重传感器以其结构简单紧凑、便于利用外壳防护密封、弹性元件为几何形状简单的圆形结构容易加工出较高的尺寸精度、可实现弹性元件与摇柱一体化设计并成为自动定心承力传力限位装置等特点，在大型电子衡器中得到广泛应用。圆柱式弹性元件在外载荷 P 作用下发生变形，属于集中载荷在三维圆柱体传播趋于均匀化的问题。其力学模型如图 4 所示。

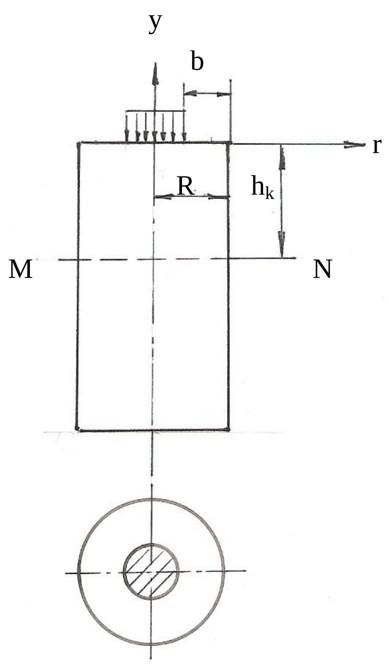

图 4 圆柱式弹性元件的力学模型

圆柱式弹性元件在集中载荷作用下应力值均匀化的问题，属于圣维南原理在三维问题中的应用。对于集中载荷在二维板式弹性元件传播趋于均匀化的结论，是否适用于三维圆柱式弹性元件，也认为当离开施加载荷的端部 h_k=2b 时，应力分布就趋于均匀了呢？法国物理学家布希涅斯克通过理论分析和试验验证得出：在三维问题中，应力趋于均匀化的程度是 1:0.57,比二维问题中应力趋于均匀化程度 1:0.64 要慢一些。也就是说，在三维问题中承受集中载荷的弹性元件，达到应力均匀化的 M—N 截面位置，其 h_k 与 b 的关系，必然是 h_k＞2b。

圆柱式弹性元件承受集中载荷的应力分布是典型的三维问题，由于变形对称于 y 轴，可以建立如下方程式：

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial \tau_{ry}}{\partial y}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0$$
$$\frac{\partial \tau_{ry}}{\partial r}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\tau_{ry}}{r}=0 \qquad (5)$$

式中：σ_r—径向应力；

σ_ϑ—周向应力；

τ_{ry}—剪切应力。

因圆柱式弹性元件为轴对称回转体，因此剪切应力τ_{ry}为零。这就大大的简化了三维问题，同样可以引入应力函数$\phi(x)$使其满足相容方程，并由边界条件求解出圆柱式弹性元件轴对称应力分布。对于此类问题要求解出各种不同载荷分布条件下不同截面的应力分布规律是非常繁琐的，需要进行大量的计算工作。20世纪80年代，中国计量科学研究院力学研究室采用北京大学数学力学系编制的“解弹性轴对称问题的有限单元程序”，在计算机上进行计算，求出各种不同载荷作用下各个截面的应力分布，并根据应力分布规律解出弹性元件应力达到均匀化的截面位置特性值 h_k 方程式：

$$\frac{h_k}{b}=0.6367+1.6704\frac{R}{b} \qquad (6)$$

式中：R—圆柱式弹性元件半径；

b—弹性元件周边与载荷作用点的距离。

当 b=R 时，经式（6）可以计算出圆柱式弹性元件在集中载荷 P 作用下，应力达到均匀分布所要求截面的位置 h_k=2.3071b≈2.3b。很明显，三维圆柱式弹性元件在集中载荷作用下应力达到均匀分布的截面位置，比二维板式弹性元件应力达到均匀分布的截面位置 h_k=2b 要大一些。

五、圣维南原理在其它结构弹性元件中的应用

在力与称重传感器弹性元件结构设计时，在选择承载器对称重传感器的载荷施加方式时，经常会遇到载荷值的传递问题，其中绝大部分问题是由一个集中力或一个小范围的面力向一个大范围面力的传递过程。因此，在三维问题中，要使载荷的传播达到均匀化，必须使截面特性 h_k 满足式（6）的条件。在确定了弹性元件已知载荷的分布特性 b 及外缘尺寸 R（此时 R 不只是半径）后，直接代入式

（6）即可求得载荷均匀化的截面位置特性值 h_k。由于 b 的数值是受集中力或小范围面力向大范围面力传递时，其传递部件的相对位置影响，所以准确的确定 b 值至关重要。考虑到对上述三维圆柱式弹性元件的分析与理论计算，可利用结构为回转体的轴对称应力求解。因此，在对其它结构弹性元件确定 b 值时，其相对位置也应该按轴对称关系来建立，以便合理的应用公式（6）。例如：

（1）一个半径为 r 的圆柱压头对一个半径为 R 的弹性元件施加载荷时，应力达到均匀化截面特性方程式的尺寸参数 b=R－r。

（2）一个半径为 D 的圆柱压头，对一个对角线长度为 L 的长方形垫块式轧制力传感器加载时，应力达到均匀化截面特性方程式的尺寸参数 $b=\frac{L-D}{2}$，$R=\frac{L}{2}$。

（3）一个对角线长度为 l 的矩形面力，同心传播到大范围的对角线长度为 L 的矩形面上，应力达到均匀化截面特性方程式的尺寸参数 $b=\frac{L-l}{2}$，$R=\frac{L}{2}$。

参考资料

【1】S．Timoshenko、J．N．Goodier（美国）．弹性理论［M］．高等教育出版社，1956 年。

【2】徐芝纶．弹性力学［M］．人民教育出版社，1982 年。

【3】吴国梅．圣维南 Saint—Venant 原理在三维问题中的应用［C］．中国计量科学研究院，1980 年 8 月。